

# TOMEMOS EN SERIO A DARWIN

José del Carmen Rodríguez Santamaría

<https://www.ejristos.com>

Bogotá, Colombia

31 de marzo de 2021

## Índice

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>2. LA TEORÍA EVOLUTIVA</b>	<b>2</b>
2.1. La TE Darwiniana . . . . .	2
2.2. El legado de Mendel . . . . .	3
2.3. Complejidad y perfección . . . . .	3
2.4. La TE Darwiniana es una teoría de caja negra . . . . .	5
2.5. Las teorías son para ponerlas a prueba . . . . .	6
<b>3. GRADUALISMO NO-DISIPATIVO</b>	<b>7</b>
3.1. La sabia ira del rey . . . . .	7
3.2. El Ahorcado . . . . .	7
3.3. Implementación . . . . .	8
3.4. Costo . . . . .	9
3.5. El problema de adivinar palabras . . . . .	10
3.6. Aplicación . . . . .	12
3.7. Conclusión . . . . .	13
<b>4. GRADUALISMO DISIPATIVO</b>	<b>13</b>
4.1. Evolución en Todas Partes . . . . .	13
4.2. La mutación aleatoria por sí sola es solo ruido . . . . .	14
4.3. Una simulación mental . . . . .	16
4.4. Costo del Gradualismo Disipativo . . . . .	17
4.5. Problemas prácticos . . . . .	20
4.6. Significado de costo exponencial . . . . .	22
<b>5. CONCLUSIÓN</b>	<b>24</b>

## Resumen

Darwin (1859) publicó su Teoría Evolutiva (TE) sin un mecanismo de herencia. Por lo tanto, es incompleta como teoría de caja blanca, mecanicista. Sin embargo, la TE Darwiniana es completa como una teoría de caja negra, una que describe su modo de operar. Aquí la dotamos de un mecanismo genético fiel. Esto permite una comparación cuantitativa con la TE actual que combina las ideas de Darwin con la genética molecular, una idea debida a Mendel. Se encuentra que las dos teorías son muy diferentes: la TE Darwiniana es milagrosa, como lo esperaba Darwin, mientras que la TE actual muestra lo difícil que es para la Evolución luchar contra la complejidad.

## 1. INTRODUCCIÓN

Darwin ([2] 1859) publicó su Teoría Evolutiva (TE) para explicar el origen de las especies. Más tarde, Mendel (1865) presentó sus experimentos con avichuelas en 1865 (Griffiths [8] 2000). Después de un largo retraso, sus ideas desencadenaron una tendencia de investigación que hoy puede verse como genética molecular, la ciencia de la herencia mecanicista por medio de genes. Las ideas de Darwin se mezclaron con la genética de Mendel en la Teoría Sintética (TS), una versión moderna de la TE que se formuló alrededor de 1930. Su formulación se considera equivalente a la Genética de Poblaciones (Jorde [11] 2016).

La TS proporciona un mecanismo para la herencia, por lo que es una teoría de caja blanca. Su sobredesarrollo ha provocado que se descarte el pensamiento original de Darwin. Sin embargo, nos parece que la TE Darwiniana es completa como una teoría de caja negra, es decir, como una formulación de resultados globales pero sin un mecanismo. Proponemos aquí un mecanismo genético fiel para la TE Darwiniana para compararla a continuación con la TS. Como esperaba Darwin, su teoría es milagrosa. Por el contrario, la TS lentamente nos muestra lo difícil que es para la Evolución luchar contra la complejidad.

## 2. LA TEORÍA EVOLUTIVA

Todo ser humano tiene el deber sagrado de reinventar la TE: basta con ver cuán sorprendentemente similares son los esqueletos de un ser humano y de un pájaro. Uno es una deformación del otro. Entonces, la TE afirma que los seres humanos y las aves son hermanos en el sentido mismo de la reproducción biológica.

Pero ser hermanos no explica de ninguna manera por qué el pájaro aterriza tan maravillosamente y por qué nosotros, los seres humanos, somos tan inteligentes.

Un gran esfuerzo por sostener una teoría que pretende explicar esto y más se debe en gran medida a Charles Darwin.

### 2.1. La TE Darwiniana

Darwin aprendió de los geólogos que había cambios en el registro fósil a lo largo de los estratos geológicos y que estos eran graduales. Esta fue una observación. Luego observó por sí mismo, digamos, en las Islas Galápagos, que los cambios en las frecuencias de los rasgos pueden ocurrir en meses en respuesta a modificaciones ambientales. Estos y decenas de otros hechos se entrelazaron en una teoría.

**La TE Darwiniana tiene muchos ingredientes, algunos resultaron estar equivocados, pero los que demostraron ser indispensables se pueden resumir de la siguiente manera:**

1. Variabilidad: entre los seres orgánicos en estado natural hay una variabilidad en muchos, muchos rasgos. La variabilidad de la raza humana es tan alta que el rostro de algunos hombres es asombrosamente similar al de algunos monos.
2. Herencia: a pesar de algunas diferencias, el hijo de tigre sale pintado.
3. La muerte es un componente fundamental de la vida. Darwin experimentó profundamente esto en su propio hogar cuando su amada hija Anne Elizabeth murió cuando contrajo la escarlatina. En general, y como afirma Malthus, nacen más descendientes de los que pueden sobrevivir porque se mantienen a raya por el hambre, las enfermedades y la depredación (guerra por el caso humano). Pero sobrevivir no es algo al azar. En cambio:
4. Selección natural: los rasgos están ligados a la supervivencia en un entorno determinado y, por lo tanto, los individuos con algunos rasgos heredables que pueden reproducirse mejor que otros hacen que esos rasgos se popularicen.
5. Cuantas más generaciones pasan, más rondas de selección de lo mejor se ejecutan y más perfectos se vuelven los rasgos que son importantes para la supervivencia diferencial. Se asume una fuente permanente de variabilidad.

Darwin desconocía el mecanismo para crear variabilidad y, además, las creencias de la época eran desfavorables porque se suponía que la herencia dependía de la sangre que según se imaginaba se mezclaba en la reproducción. El mecanismo vino de un monje que convirtió el jardín en laboratorio.

## **2.2. El legado de Mendel**

Siete años después de que Darwin publicara su trabajo, también se publicó un artículo del monje Mendel. Permaneció en la oscuridad durante unos 30 años y la Ciencia necesitó otros 30 años para madurar la percepción de su importancia.

Mendel era un idealista que trató de acomodar los datos de campo a lo que pensaba. Su idea era que los rasgos de sus habichuelas, tener pétalos de color púrpura o blanco, corresponden a elementos discretos que se transmiten a la siguiente generación. Esos elementos discretos se denominan ahora genes con el problema de que pueden transmitirse pero no necesariamente expresarse, lo que demuestra que la regulación génica existe y funciona. De esa forma, demostró que la complejidad es inherente a la vida.

La disciplina originada por Mendel y que hoy se conoce como Biología Molecular ha explicado tanto la herencia como la variabilidad. La herencia se explica diciendo que el genoma, el contenido general del ADN, se copia de padres a hijos. Por otro lado, la variabilidad se debe a que el procedimiento de copia no es exacto e introduce cambios aleatorios o mutaciones en el ADN que modifican los rasgos correspondientes.

## **2.3. Complejidad y perfección**

La extrema complejidad y la maravillosa perfección de la vida impresionan a todo mundo y están en la raíz de la mayoría de creencias religiosas. Explicarlas es una

prioridad para la Ciencia. La idea que ella acepta fue formulada por Darwin y hoy es tan actual como al principio.

Se entiende por complejidad la propiedad de un objeto cuya estructura necesita un documento extenso para ser descrita. Por otro lado, la perfección tiene que ver con la función. Digamos que la función del ojo es ver y yo, siendo un anciano, me maravillo continuamente de la funcionalidad actual de mis ojos a pesar de varios problemas como con la visión a distancia. Cuando me deprimó, agradezco al Señor por mis ojos, y trucos como este me devuelven paz y alegría.

En cuanto a la complejidad, los documentos considerados son cadenas en formato binario, formadas por ceros y unos. Aunque las cadenas binarias son muy específicas, no se pierde generalidad porque cada cadena de cualquier naturaleza y con cualquier contenido de información siempre se puede codificar como binaria. Este hecho ha permitido la universalidad de los chips de memoria y computación que solo manejan ceros y unos. Estas cadenas se denominan genéricamente contraseñas. En el Gradualismo se pueden adivinar paso a paso, bit por bit.

La existencia de órganos extremadamente finos y perfectos, como el ojo, fue un desafío para Darwin. Pero con el correr de los años propuso una solución:

*Parece absurdo desde todo punto -lo confieso espontáneamente-suponer que el ojo pudo haberse formado por selección natural dadas todas sus inimitables disposiciones para acomodar el foco a diferentes distancias, para admitir cantidad variable de luz y para la corrección de las aberraciones esférica y cromática. Pero cuando se dijo por vez primera que el Sol estaba quieto y la tierra giraba a su alrededor, el sentido común de la humanidad declaró falsa esta doctrina; pero el antiguo adagio de vox populi, vox Dei, como sabe todo filósofo, no puede admitirse en la ciencia. La razón me dice que si se puede demostrar que existen muchas gradaciones, desde un ojo sencillo e imperfecto a un ojo complejo y perfecto, siendo cada grado útil al animal que lo posea, como ocurre ciertamente; si además el ojo alguna vez varía y las variaciones son heredadas, como ocurre también ciertamente; y si estas variaciones son útiles a un animal en condiciones variables de la vida, entonces la dificultad de creer que un ojo perfecto y complejo pudo formarse por selección natural, aun cuando insuperable para nuestra imaginación, no tendría que considerarse como destructora de nuestra teoría. El saber cómo un nervio ha llegado a ser sensible a la luz, apenas nos concierne más que saber cómo se ha originado la vida misma, pero debo señalar que varios hechos me hacen sospechar que los nervios sensibles al tacto pueden volverse sensibles a la luz, y también a las vibraciones más toscas del aire que producen sonido.*

Vemos que la solución propuesta por Darwin es el gradualismo, el cual reúne pequeños avances de generación en generación. Suponiendo que la Evolución nunca se detiene, esto es lo que él esperaba a largo plazo:

*Como todas las formas de vida vivientes son descendientes directos de las que vivieron mucho antes de la época cámbrica, podemos estar seguros de que la sucesión ordinaria por generaciones nunca se ha roto ni una sola vez, y que ningún cataclismo ha desolado el mundo entero. Por lo tanto, podemos mirar con cierta confianza hacia un futuro seguro de gran duración. Y como la selección natural actúa únicamente por y para el bien de cada ser, todas las dotes corporales y mentales tenderán a progresar hacia la perfección.*

*Es interesante contemplar una ribera enmarañada, vestida con muchas plantas de muchas clases, con pájaros cantando en los arbustos, con varios insectos revoloteando*

*y con gusanos arrastrándose por la tierra húmeda, y reflexionar que estas formas elaboradamente construidas, tan diferentes unas de otras, y dependientes unas de otras de una manera tan compleja, todas han sido producidas por leyes que actúan a nuestro alrededor. Estas leyes, tomadas en el sentido más amplio, son Crecimiento con reproducción; Herencia que está casi implícita en la reproducción; Variabilidad por la acción directa e indirecta de las condiciones de vida, y por uso y desuso; una relación de aumento tan alta que conduce a una lucha por la vida y, como consecuencia, a la selección natural, que conlleva la divergencia de caracteres y la extinción de formas menos mejoradas. Así, de la guerra de la naturaleza, del hambre y la muerte, se sigue directamente el objeto más exaltado que somos capaces de concebir, a saber, la producción de los animales superiores. Hay grandeza en esta visión de la vida, con sus varios poderes, habiendo sido originalmente insuflados por el Creador en unas pocas formas o en una; y que, mientras este planeta ha ido dando vueltas de acuerdo con la ley fija de la gravedad, desde un comienzo tan simple, las formas infinitas más bellas y maravillosas han evolucionado y están evolucionando.*

**Vemos así que la Evolución + Gradualismo fue para Darwin una explicación suficiente, convincente y estética de la vida en todas sus facetas de complejidad y perfección.**

#### **2.4. La TE Darwiniana es una teoría de caja negra**

La TE de Darwin es incompleta porque carece de un mecanismo de herencia. Ahora bien, esta acusación es correcta desde el punto de vista de las teorías de caja blanca. En ellas, el mecanismo debe especificarse de manera exhaustiva. Sin embargo, su teoría es completa, incluso redundante, como una teoría de caja negra, una que declara el funcionamiento general sin entrar en mecanismos detallados.

**La característica sobresaliente de la TE Darwiniana es que la evolución anula la complejidad.** Es por eso que el detalle mecanicista de las transformaciones evolutivas es irrelevante. Esto es exactamente lo que los científicos parecen creer incluso hoy en día. Por lo tanto, a nadie le preocupa reproducir la transformación de las aletas de un pez pulmonado o de su antepasado en las extremidades de, digamos, una rana.

Analicemos un poco el significado de la complejidad y de su anulación. Sucede que todos somos expertos en complejidad. Es el aire que respiramos a cada instante. Tan solo consideremos mi propia experiencia con respecto a la música:

Mi padre me educó para despreciar la música porque en ese momento un músico corría el riesgo de morir de hambre. Sin embargo, tan pronto como pude, tomé algunas clases particulares para tocar flauta dulce con la ayuda de partituras porque mi oído musical era el peor del mundo. A continuación, practiqué con pianos, un violonchelo, teclados y una flauta. Incluso me sentí lo suficientemente seguro para tocar en los cultos de la iglesia y enseñar a niños y adultos. Para mí, ha sido extremadamente difícil pasar el nivel de principiante, pero después de años y más años de práctica informal, se pueden hacer algunas cosas que atraen la atención de los demás. Ahora, ¿cuánto tiempo necesitaría para tocar tan bien como un joven profesor de música que conocí hace 2 años? Para ser sincero, necesitaría nacer de nuevo. El problema es que toco muy lento, fuera de tempo, sin adornos, sin complejidad, sin arte. Sin embargo, he estado trabajando en una nueva forma de acompañamiento que él me enseñó. Eso

significaría un gran progreso. Pero, dos años de trabajo y todavía no puedo emplearlo en los cultos.

Se podría argumentar que no tengo ninguna importancia evolutiva. Por lo tanto, pensemos en mi joven maestro. Nació en medio de una familia de músicos en la iglesia. Por tanto, recibió entrenamiento continuo e intensivo incluso antes de nacer. No es de extrañar que ahora sea espectacular. El problema con mi apreciación es que no soy un juez autorizado. En cambio, aplicó a una escuela profesional de música, fue admitido, y eso fue para él un gran triunfo. El hecho es que él no es para sí mismo un gran maestro. De hecho, me dio un enlace a un video del músico profesional que admira. Me explicó la técnica recursiva que usa ese artista para improvisar. Su sueño es claro: algún día me gustaría tocar como él. Pero en verdad, no veo gran diferencia entre él y ese admirado profesional.

**1 Conclusión general.** *La perfección puede imitarse, aproximarse de muchas maneras, y es extremadamente costoso ascender a lo largo de cualquiera de tantos caminos escalonados. Entonces, uno puede encontrar especímenes que permanecen congelados en un estado dado, luchando durante una eternidad por progresar pero sin una mejora real. Cuanto más cerca de la perfección, más difícil es mejorar. En resumen: la subperfección precede abundantemente a la perfección.*

Si transcribimos esto a la complejidad biológica, podemos decir: Somos muy complejos y altamente funcionales. Ser complejo significa que existen muchas aproximaciones que son productos mediocres o de baja calidad. Por lo tanto, estos se encontrarán antes que la perfección. Por consiguiente, si fuésemos el resultado de la Evolución, abundantemente se encontrarían huellas de imperfección no solo en el registro fósil sino también en nuestros propios cuerpos. ¿Dónde están? En ningún lugar. Es por eso que la ET es obviamente falsa.

Eso es la complejidad en términos subjetivos. Ahora bien, **¿puede anularse la complejidad?** Yo diría que la Ciencia (matemáticas más experimentos inteligentes) es el método más poderoso para acabar con la complejidad. Entonces, aniquilar la complejidad es posible. Y, ¿qué pasa con la TE Darwiniana?

**2 Concurso.** *Cree la mejor implementación de la TE Darwiniana que represente fielmente su especificación de caja negra, la de convertir la Evolución en un anulador de complejidad. Nuestra propuesta aparece en la siguiente sección.*

Debido a que estamos discutiendo preguntas fundamentales, nos conviene hacer una aclaración.

## **2.5. Las teorías son para ponerlas a prueba**

El propósito de la Ciencia es formular teorías para ser puestas a prueba. Esto se hace ideando experimentos cruciales. Si los resultados coinciden con lo esperado, la teoría sobrevive y se inventan pruebas más contundentes. Cuando la teoría falla, se inventa una nueva modificando la existente o creando un nuevo enfoque. Y se repite hasta

nunca acabar. De esa manera la Ciencia se fortalece gracias a un proceso evolutivo que nunca se cansa de cuestionar. Estas ideas se deben a Popper (Shea [10], 2015?).

La Ciencia real tolera las contradicciones como los niños la lluvia, por ejemplo en Física (Weinberg, [13], 1989). En cuanto a Biología, la TE está protegida del procedimiento de falsificación antes mencionado porque si la TE está amenazada, el Creacionismo gana puntos. Y esto es intolerable para el Materialismo, el cual entra a mandar como directiva filosófica reguladora. Entonces, ¿cuál podría ser el propósito de estudiar los fundamentos de la TE? Es ayudar a todo el mundo a comprender en qué es lo que cree.

### 3. GRADUALISMO NO-DISIPATIVO

Presentamos una implementación fiel de caja blanca del gradualismo de Darwin. Debido a que es mecanicista, necesitamos un problema para probar su poder. Adivinar palabras, frases e ideas ha demostrado ser un problema muy interesante. Éste adquiere un significado biológico si preguntamos: ¿Quién o qué adivinó el ADN de mis genes? De hecho, los juegos de adivinanzas han sido comunes desde el principio de los tiempos en todas las culturas. Ejemplo:

#### 3.1. La sabia ira del rey

¿Qué tipo de rey creen que soy? Todos hablaron bien, todos menos una mujer que permaneció en silencio. Ella era Ia, la amada hija y asistente personal del Primer Ministro. Entonces, el Rey se dirigió a ella por su nombre, y de inmediato el Ministro se desmayó. Ella dijo: Eres un mal rey porque los pobres se vuelven más pobres y los ricos se vuelven más ricos. En reacción, el Jefe del Ejército exigió ansiosamente que la ejecutaran y así también lo hicieron todos los demás. El Rey aceptó. Sí: él estuvo de acuerdo. Para entonces el Primer Ministro ya había recobrado los sentidos y solicitó concederle una oportunidad. Déjala adivinar la forma en que debería morir. Le concedo 70 vidas, respondió el Rey y escribió la sentencia de muerte en un rollo. Luego se le dieron 70 oportunidades para adivinar la forma en que debería morir. Recordó 17 e inventó 53 más, pero fracasó. Entonces, se le dio el rollo y se le ordenó que lo leyera en voz alta:

Te condeno a morir de vieja.

Para cumplir con la sentencia del Rey y luego de deliberar, se le asignaron guardaespaldas y médicos. Después de muchos años, murió de vieja disfrutando del respeto de sus enemigos y del amor de la gente de la tierra por quienes tanto bien había hecho.

**Vemos que adivinar palabras, frases, es un problema complejo. ¿Se puede anular su complejidad?** Sí. Hay un juego muy popular que emplea una poderosa estrategia para atenuar la complejidad.

#### 3.2. El Ahorcado

Para adecuar la complejidad a los niños y a los estudiantes de idiomas, se ha ideado un precioso juego de adivinar palabras que se llama El Ahorcado. Lo juegan dos personas, el Juez y el Jugador.

### **Principales reglas del Ahorcado:**

1. El Juez piensa en una palabra objetivo y el Jugador tiene que adivinarla pronunciando una serie de letras.
2. Si el jugador propone una letra y está en la palabra objetivo, el Jugador propone otra letra. Si no está en esa palabra, el Juez agrega un segmento a una figura de líneas que cuelga de una horca.
3. El juego termina cuando el Jugador completa la palabra objetivo, o bien cuando el juez termina con su hombre ahorcado. En el primer caso, el Jugador gana, pero en el segundo, el Jugador pierde. El juez nunca gana.

Puede jugar este juego en Internet con sus hijos (Horton [7] 2013?). Para estudiar el código, use el programa Hangman.html que acompaña este documento. Ahora bien, a todos los niños y adolescentes del mundo les encanta este juego. Entonces, no es tan difícil. ¿Por qué? ¡Porque utiliza algo muy interesante!

### **Tecnología de anulación de la complejidad:**

- Se pueden dar pistas que restrinjan la palabra objetivo a un conjunto de, por ejemplo, frutas, animales salvajes o ciudades.
- Una palabra es una cadena ordenada. En este juego se olvida el orden, lo único que importa es si hay o no una letra en la palabra.
- Todas las instancias de una letra dada se adivinan con un solo disparo. En resumen: el juego simplifica el problema sustituyendo una cadena ordenada por un conjunto.
- Una vez que se propone un carácter, el Juez lo clasifica como correcto o incorrecto y esta clasificación es eterna y siempre visible para el Jugador. Por lo tanto, el alfabeto efectivo de los caracteres fuente se acorta con cada disparo. Así, el juego no propicia retrocesos ni repeticiones.

**3 Concurso.** Use la tecnología del Ahorcado o la que prefiera para diseñar un algoritmo de eliminación de la complejidad para adivinar frases utilizando la Evolución. Nuestra propuesta viene enseguida. Nos ocuparemos del problema de adivinar una cadena binaria ordenada, y como estrategia de eliminación usaremos solo el cuarto punto de la lista anterior.

### **3.3. Implementación**

La evolución se puede describir sucintamente de la siguiente manera: si algo no funciona, haga un cambio. Esta es una mutación. Para mejorar la variabilidad, combine diferentes soluciones para producir una tercera. Esta es la recombinación. Elija las mejores soluciones y selecciónelas para perfeccionarlas aún más. Esta es la selección.

En la naturaleza, la mutación y la recombinación son ejecutadas por la maquinaria bioquímica celular, mientras que la selección es el proceso general en el que algunos individuos con ciertos rasgos logran sistemáticamente sobrevivir y reproducirse mejor que otros.



La selección es una abstracción global que depende de la interacción del individuo como un todo con su entorno como un todo. La selección no está escrita en ninguna parte. Es una interacción que depende de organismos enteros. La naturaleza ve una mano y lo útil que es, pero no el ADN que la codifica (¿está realmente codificada la mano en el ADN?). Más claramente, los genes y sus bases están ocultos a la selección. Sin embargo, los científicos están realizando actualmente un esfuerzo titánico para asociar las características de los individuos a versiones específicas de grupos de genes. Esta tarea no es nada fácil y por eso la batalla de la Ciencia contra enfermedades terribles como el cáncer es tan lenta. Por el contrario, en el juego del Ahorcado de cada letra pronunciada se dice si está o no en la palabra objetivo. Ser o no ser es una certeza que se espera que acelere el Proceso Evolutivo y cuyo poder real mediremos aquí.

Ahora estamos listos para probar nuestro algoritmo como anulador de la complejidad. Este algoritmo se denomina no-disipativo porque recopila pequeños avances que nunca se dañan, corrompen o manchan:

#### **Algoritmo gradualista no-disipativo:**

1. Comience con una cadena generada al azar. Detecte los sitios coincidentes y congélelos.
2. Aplique una mutación aleatoria a los sitios no congelados (aquellos que son incorrectos), detecte las coincidencias correctas y congélelas. Haga esto de forma recurrente.
3. Deténgase cuando todos los sitios coincidan.

### **3.4. Costo**

Investiguemos el costo de adivinar una contraseña con el gradualismo no-disipativo.

**Ejemplo.** Supongamos que necesitamos adivinar la cadena 101010. Ella representa la información de ese algo que tanto nos maravilla, como un ojo. La cadena inicial generada al azar es 100101.

Evolución:

101010 palabra objetivo

100101

Nuestro individuo coincide en 2 sitios que congelamos.

101010 palabra objetivo

- - 0101

Los sitios no congelados se reemplazan por caracteres binarios aleatorios. El resultado es:

101010 palabra objetivo

- - 1100

Se han adivinado dos nuevos sitios que se congelan:

101010 palabra objetivo

- - -10 -

Las cosas permanecen iguales en una nueva ronda de mutación:

101010 palabra objetivo  
 - - -10 -  
 Entonces se adivina un sitio más  
 101010 palabra objetivo  
 - - -11 -  
 El sitio coincidente se congela:  
 101010 palabra objetivo  
 - - -1 - -  
 Nueva ronda de mutación:  
 101010 palabra objetivo  
 - - -0 - -  
 Finaliza la tarea.

Decimos que el costo de adivinar la palabra objetivo es 5 porque necesitábamos una configuración inicial más 4 modificaciones, lo que da un total de 5 individuos porque podría entenderse que cada nueva ronda de mutación se realizó sobre un clon del último individuo.

**Cuando la cadena es corta esperamos una solución casi inmediata, pero cuanto más grande es la cadena, se espera que se necesiten más y más generaciones para adivinar el objetivo. Pero, ¿cuántas?** Necesitamos resultados generales que deben obtenerse por extrapolación de simulaciones. Nuestro algoritmo se especificó para un individuo, pero preferimos usar 4 y clonar el mejor de cada generación. Más formalmente:

### 3.5. El problema de adivinar palabras

Especificamos aquí un problema general que será resuelto aquí por el Gradualismo No-disipativo pero por el Disipativo en la sección siguiente sección.

**Especificación del problema de adivinar palabras:** para cadenas binarias aleatorias de longitud 1, 2, 3, ... haga que la Evolución no-disipativa adivine cada una de ellas y dé como resultado el costo de la solución que viene dado por

$$\text{costo} = \text{tamaño de la población} \times \text{número de generaciones.}$$

El costo se debe dar en función de la longitud del input, igual a la longitud de las cadenas binarias utilizadas, igual para todas. Haga una regresión para hallar el costo en general.

**4 Ejercicio.** Para estimar el costo de resolver el Problema de adivinar palabras por Gradualismo No- disipativo, ejecute el programa *NonDissptveGrad.html* e informe sus conclusiones. *Respuesta*

**5 Ejercicio.** El primer gráfico presentado por el programa *NonDissptveGrad.html* sugiere que el costo de adivinar una contraseña depende de la raíz cuadrada de  $H =$

longitud de la clave. Es por eso que se buscó una regresión de la forma  $y = aH^r$  con  $0 < r < 1$ , la cual se muestra en el segundo gráfico. Evalúe la dependencia propuesta.

**Respuesta**

**Nota.** Para probar la dependencia de la raíz, recurrimos a una transformación logarítmica:

$$\text{cost} = y = aH^r$$

Si tomamos logaritmos, obtenemos:

$$\log(\text{cost}) = \log(y) = \log(aH^r) = \log(a) + r\log(H).$$

Con las siguientes abreviaciones

$$w = \log(y)$$

$$b = \log(a)$$

$$x = \log(H)$$

obtenemos

$$w = b + rx$$

Es por eso que hacemos una regresión lineal del logaritmo del costo sobre el logaritmo de la longitud de la palabra objetivo. Para restaurar la raíz, usamos una transformada exponencial:

$$\begin{aligned} y &= \exp(w) = \exp(b + rx) = \exp(\log(a) + r\log(H)) \\ &= \exp(\log(a))\exp(r\log(H)) = \exp(\log(a))\exp(\log(H^r)) = aH^r \end{aligned}$$

**6 Ejercicio.** El algoritmo presentado es extremadamente rápido. ¿Es esa impresión una falsa ilusión creada por una programación defectuosa? Verifique el programa dándole dentro del código a las diversas variables de escritura el valor true, uno a la vez, y elija valores bajos de passwordLength.

**7 Concurso.** Sabiendo que una dependencia en forma de raíz ya no sirve, encuentre la verdadera dependencia del costo sobre la longitud de la contraseña y defíndala gráfica y matemáticamente. Nuestra propuesta es la siguiente:

Dado que no estamos satisfechos con proponer una dependencia tipo raíz del costo de adivinar una contraseña sobre la longitud de la contraseña, probamos una dependencia logarítmica que gráficamente parece ser adecuada. Para explicar de dónde viene, proponemos el siguiente razonamiento que es válido para un individuo.

La tarea consiste en adivinar por gradualismo no-disipativo una cadena binaria de longitud  $H$ . Hay un único individuo, una cadena de la misma longitud, que es transformada por la Evolución. Establecemos la mutación por sitio por generación en 1 y desactivamos la recombinación. Luego podremos observar que en la configuración inicial al azar, se adivinará la mitad de los sitios. Dado que estamos en el gradualismo no-disipativo, los sitios correctos se congelan. En la segunda generación, la mitad de la mitad se agregará a los sitios adivinados, mientras que una cuarta parte quedará sin resolver. Obtenemos en general:

Primera generación al azar: fracción coincidente =  $\frac{1}{2}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{2}$ .  
 Segunda generación: fracción coincidente =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ .  
 Tercera generación: fracción coincidente =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ .  
 Para la generación  $i$ : fracción emparejada:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^i}$ , fracción no igualada  $\frac{1}{2^i}$ .  
 Ahora, llegará una generación  $n$  cuando solo quede un sitio o bit de  $H$  por resolver. Esto sucede cuando

$$\begin{aligned} H \frac{1}{2^n} &= 1 \\ H &= 2^n \\ n &= \log_2(H) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para una población grande, una con 4 individuos es suficiente, el bit faltante se agregará en la generación siguiente. Entonces, el programa terminará en la generación  $n = \log_2(H) + 1$ . La dependencia logarítmica predicha se verificó gráficamente en el programa NonDissptveGradLog.html: para una población de 4 individuos, la dependencia fue  $\text{costo} = 4,1 \log_2(H) + 0,4$ , lo que parece satisfactorio.

Observemos que la función logaritmo es convexa, por lo tanto, el gradualismo no-disipativo es más eficiente cuanto más larga sea la contraseña. En realidad, también es extremadamente barata: es sublineal, lo que significa que para cada función de costo de la forma  $l = l(H) = aH + b$ , es decir, para cada  $a$  y  $b$ , existe un  $c$  tal que para  $H > c$  el costo del gradualismo no-disipativo es menor,  $\text{costo}(H) < l(H)$ . Un ejemplo de función lineal es la de escribir un documento que cuesta la misma cantidad  $a$  por cada letra. Entonces, el costo es de la forma  $l = aH + b$  donde  $b$  es el costo fijo, digamos, para pagar el derecho a usar la electricidad.

**8 Desafío.** *Agregue la significancia estadística hasta la precisión deseada a todos los programas y sus resultados.*

Para resumir, estamos de acuerdo con una dependencia logarítmica del costo sobre  $H$ , la longitud del input. Extrapolamos ese resultado a todos los valores de  $H$ . Gracias a nuestro trabajo matemático, sentimos confianza en nuestra extrapolación, y llegamos a la conclusión de que el sueño de Darwin de la Evolución como una maquinaria que aniquila complejidad se ha realizado en una variante del juego del Ahorcado. ¿Tiene esto algo que ver con este mundo?

### 3.6. Aplicación

El gradualismo no-disipativo es tan rápido que uno se pregunta si está implementado en algún lugar de este mundo. Propongámoslo como una solución al terrible problema de por qué los niños aprenden a hablar tan rápido. Chomsky propuso que los seres humanos tienen una gramática universal que está impresa en sus conexiones neuronales cerebrales (Dubuc [4] 2000?). Pero el gradualismo no-disipativo podría funcionar. La clave es que los niños tienen una memoria increíble y, además, sus mamás los retroalimentan continuamente. El resultado neto es una implementación del algoritmo del

ahorcado que acabamos de estudiar: las cosas se identifican rápidamente y se aprenden para siempre. Y esto puede producir resultados asombrosos. Este problema es un tópico importante de la Ciencia (Yang [12] 2004).

### 3.7. Conclusión

Hemos demostrado que existe al menos un modelo en el que el sueño de Darwin se hace realidad y la evolución anula complejidad: es el gradualismo no-disipativo. En él, la mutación es aleatoria y es una fuente de creatividad, pero una vez que se adivina un sitio, se congela, se protege de la mutación. Así, la Evolución hace crecer la perfección continuamente y sin contratiempos.

## 4. GRADUALISMO DISIPATIVO

Hemos admirado en la última sección las sorprendentes posibilidades del Gradualismo no-disipativo, cuya característica sobresaliente es que una vez que un sitio ha sido adivinado, se congela y se protege de la mutación. Consideramos que los sueños de Darwin se cumplen fielmente con este tipo de gradualismo porque la Evolución se convierte en un mágico anulador de la complejidad. Nuestra tarea ahora es compararlo con el gradualismo disipativo, en el que nada está protegido de la mutación y, por lo tanto, los logros pueden disiparse por la mutación. Ejemplo:

```
101010 cadena objetivo
110101 cadena con un sitio coincidente. La mutación produce:
010101 retroceso: cero coincidencias.
```

Nos apresuramos a afirmar que **si el gradualismo es aplicable en algún lugar a la evolución natural, entonces debe ser disipativo**. La razón es que es universalmente aceptado que la mutación es aleatoria e imposible de blindar. Esta tremenda creencia se remonta a de Vries (1901), quien construyó su autoridad sobre un trabajo muy intenso en plantas. Además, nos enseñó que el entorno no puede guiar la dirección de la mutación, que ocurre en saltos. De esa manera, liberó a la Evolución de las ideas de Lamarck y se opuso al gradualismo de Darwin (Hall [5] 1935). Los mecanismos moleculares de la evolución son realmente ricos y complejos y no se conocían en 1900, por lo que de Vries usó la palabra mutación como sinónimo de cambio de efectos genéticos que podrían deberse a mutación del ADN, recombinación o reordenamiento cromosómico.

Especifiquemos ahora nuestro algoritmo para simular el Gradualismo disipativo.

### 4.1. Evolución en Todas Partes

Darwin propone en 1859 la primera versión científica de TE. La Teoría Sintética alrededor de 1930 mezcló sus ideas con la noción de gen que era la herencia de Mendel. En esta nueva versión, la Evolución es solo el aumento o la disminución de las frecuencias de los genes. Más tarde, en las décadas de 1950-60-70, los ingenieros desarrollaron el Algoritmo Genético, que era una simulación de la evolución en computadoras (Holland [6] 1992). Formalmente:

**El algoritmo genético general (GA), el credo del gradualismo disipativo:**

1. Declare un propósito, un objetivo, una función a optimizar.

2. Fabrique una población de soluciones iniciales codificadas en cadenas al azar que reciben el nombre de cromosomas.
3. Ajuste las soluciones mediante la iteración de:
  - Reproducción: las soluciones se clonan para conformar una nueva población. La probabilidad de clonación de una solución es proporcional a su idoneidad o calidad funcional. En realidad, hay demasiada libertad en la forma como se puede definir la reproducción.
  - Mutación aleatoria: se cambian algunos caracteres. Sin blindaje. Todo puede mutar, disiparse.
  - Recombinación aleatoria: parte de una solución se concatena con parte de otra solución para generar una nueva.

Aparentemente, este fue un trabajo curioso que podría pasar como una verificación más de la TE. No es tan simple. Al mirar un AG, uno ve conceptos que uno usa todos los días. Por ejemplo:

Para escribir un párrafo, hacemos muchos cambios antes de declararnos satisfechos. Un cambio representa una mutación. Y para escribir un buen párrafo, combinamos partes de diferentes párrafos de posibles fuentes diferentes para formar uno nuevo. Esta operación es solo una recombinación. Suponemos que tenemos experiencia y que somos muy inteligentes, por lo que podemos evaluar la calidad de cada escrito. Es decir, podemos seleccionar la mejor de varias opciones y apartarla para trabajarla mejor. Observe que acumulamos avances más bien pequeños para lograr grandes cosas. Esto es precisamente el Gradualismo.

Para pasar de la escritura de párrafos a la biología, nuestro procedimiento de selección se sustituye por la reproducción preferencial automática y la supervivencia de aquellos que lo hacen mejor. Y, lo que es más importante, nuestra inteligencia es reemplazada por mutación + recombinación a ciegas.

Sumando todo, encontramos:

**Evolución en Todas Partes. Los ingredientes de la TE son: mutación, recombinación, reproducción con herencia, selección y gradualismo. Por lo tanto, la TE predice que la función que se selecciona debe mejorar en cualquier entorno que uno pueda imaginar con estos cinco ingredientes.**

Las principales revistas muestran que los AGs y la Evolución en Todas Partes continúan brindando información y soluciones excepcionales a problemas importantes.

Hagamos ahora una advertencia importante: la evolución es el resultado de un trabajo cooperativo de varios factores.

## 4.2. La mutación aleatoria por sí sola es solo ruido

La mutación funciona en todas las direcciones sin importar cuán venenoso pueda ser el resultado. ¿Es útil la mutación sola? Escuchemos un diagnóstico antiguo.

**La queja de Homero: nada se puede esperar de una mutación aleatoria** porque es peor que Penélope: durante tres años destruyó parcialmente durante la noche lo que tejía durante el día. Entonces, a la mañana siguiente, su mortaja estaba bastante incompleta. Pero si la destrucción es total, no se espera ningún progreso.

**9 Concurso.** *Ponga en ecuaciones la queja de Homero. Las ecuaciones deben ser una obra de arte que combine simplicidad con fuerza y poder predictivo. Nuestra propuesta es la siguiente:*

Nuestra tarea es adivinar una contraseña de longitud  $H$  con cadenas de la misma longitud. Prestemos atención al cromosoma más apto. Suponga que en un instante dado  $t$  hay  $M_t$  sitios que coinciden con la contraseña. Hay  $H - M_t$  sitios que no coinciden.

Activemos la mutación. La tasa de mutación es  $\mu$ . Esto significa que para pasar a la siguiente generación, la cantidad de sitios afectados por la mutación es  $\mu M_t$ . Cuando se toca un sitio, se reemplaza por un bit aleatorio. Por lo tanto, la mitad de ellos,  $\frac{1}{2}\mu M_t$  coincidirá con la contraseña. Por otro lado, los sitios  $M_t - \mu M_t$  que no se tocan siguen estando correctamente definidos. Al mismo tiempo, de los sitios  $H - M_t$  que no son correctos, se tocará una fracción  $\mu(H - M_t)$ . La mitad de ellos,  $\frac{1}{2}\mu(H - M_t)$ , será correcta, la otra no. Al agregar todos los sitios que coinciden, obtenemos:

$$\begin{aligned}M_{t+1} &= \frac{1}{2}\mu M_t + M_t - \mu M_t + \frac{1}{2}\mu(H - M_t) \\M_{t+1} &= \frac{1}{2}\mu M_t + M_t - \mu M_t + \frac{1}{2}\mu H - \frac{1}{2}\mu M_t \\M_{t+1} &= M_t - \mu M_t + \frac{1}{2}\mu H \\M_{t+1} &= M_t + \mu\left(\frac{1}{2}H - M_t\right) \\M_{t+1} - M_t &= \mu\left(\frac{1}{2}H - M_t\right)\end{aligned}$$

Esto significa que la cantidad de sitios coincidentes aumentará cuando  $\frac{1}{2}H - M_t > 0$ , es decir, cuando  $M_t$  esté por debajo de la mitad de la longitud de la contraseña. Además, si por alguna razón  $M_t$  es mayor, la mutación perseguirá a los sitios coincidentes hasta que su número caiga por debajo de  $\frac{1}{2}H$ . Vemos que cuando la mutación funciona sola, la mediocridad es el status quo. ¿Podemos escapar de algún modo de este infierno? Sí podemos. Todo lo que necesitamos es alguien que nos ofrezca una mano.

**El principio de creatividad. La mutación por sí sola no es nada. Pero la mutación se convierte en una fuente invaluable de creatividad si alguien puede apreciar sus hallazgos.** Ese alguien se llama selección. En Biología, la selección no existe, pero es un nombre para la reproducción preferencial automática de algunos individuos en la lucha por la vida. Estos se denominan más aptos y tienen instrucciones de ADN que favorecen algún aspecto que ayuda a sobrevivir, digamos, digieren más rápido el ácido láctico, que es un subproducto del metabolismo y, por lo tanto, no se intoxican con trabajos pesados.

Usemos ahora mutación al azar + selección para hacer que el Gradualismo Disipativo resuelva el problema de la contraseña.

### 4.3. Una simulación mental

La tarea consiste en adivinar por Gradualismo Disipativo una cadena binaria de longitud  $H$  por individuos que son cadenas de la misma longitud. La mutación es aleatoria, no sabe nada sobre los efectos buenos o malos sobre la función, y la selección es dictatorial, es decir, se reproduce el más apto y nada más. Concretamente:

El algoritmo dictatorial: después de cada ronda de mutación aleatoria, elija el mejor y llene el mundo con él.

¿Qué producirá la recurrencia de este procedimiento? Al pensar en esto, mi cabeza ejecutó una simulación que prometía convertir el Gradualismo Disipativo en un procedimiento todopoderoso para resolver problemas. Parecía tan impresionante que decidí transcribirlo con precisión para examinar qué pasaba. Esto es lo que resultó:

Pongamos la mutación por letra por generación en 1 y desactivemos la recombinación. Debemos observar que en la población inicial al azar, se adivinará la mitad de los sitios en cada individuo.

Configuración inicial al azar: fracción coincidente =  $\frac{1}{2}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{2}$ .

Debido a que la selección es dictatorial, la nueva población consiste enteramente en clones del mejor, del dictador. Entonces, la mitad de los sitios en cada cadena es correcta. Ahora, aplicamos mutación aleatoria. Si la población es lo suficientemente grande, en algunos individuos los sitios coincidentes no se verían afectados por la mutación, mientras que todos los sitios no coincidentes sí. Todo esto por mera aleatoriedad. Por lo tanto, y en referencia a esos individuos, la mitad de los sitios intactos, una cuarta parte del número total de sitios, cambiará por mutación en la primera generación al valor correcto. Así que, la mitad de la mitad de los sitios se agregará a la fracción emparejada, mientras que una cuarta parte quedará sin resolver. Obtenemos:

Segunda generación: fracción coincidente =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ .

Tercera generación: fracción coincidente =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ , fracción no coincidente =  $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ .

Para la generación  $i$ : fracción emparejada =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^i}$ , fracción no emparejada  $\frac{1}{2^i}$ .

Ahora, llegará una generación  $n$  cuando solo quede un sitio o bit de  $H$  por resolver. Esto sucede cuando

$$\begin{aligned} H \frac{1}{2^n} &= 1 \text{ or} \\ H &= 2^n \text{ or} \\ n &= \log_2(H) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para una gran población, la parte que falta se agregará en la generación siguiente. Entonces, la tarea se completará en la generación  $n = \log_2(H) + 1$ .

La descripción antes mencionada no es válida para la población completa sino solo para los más aptos. Hemos probado un resultado que dice:

**10 Teorema:** *El Gradualismo Disipativo implementado por el algoritmo dictatorial es una deformación estadística del Gradualismo No-disipativo y es tan rápido como el*



último si solo se proporcionan los recursos suficientes. En ese caso, este nuevo algoritmo converge a una solución en un número de generaciones logarítmico en la longitud de la entrada  $H$ .

**11 Crítica.** *El Teorema es mera vanidad, es como una lámpara inútil: si tenemos suficientes recursos, la aleatoriedad produce la solución perfecta en la población inicial.*

Busquemos otro camino, uno sencillo, directo.

#### 4.4. Costo del Gradualismo Disipativo

La aleatoriedad y la evolución son todopoderosas en un mundo de recursos ilimitados. El mundo en el que vivimos no es así. Aquí todo cuesta mucho. ¿Cuál es el costo del Gradualismo Disipativo para adivinar una contraseña?

Hemos visto que, tal como lo predijo Homero, la mutación aleatoria por sí sola actuando en una población de individuos aislados es una fuerza de estancamiento que conduce al Infierno de la Mediocridad. Pero **si alguien aprecia las ideas de mutación, ésta se convierte inmediatamente en una fuente de creatividad para atacar los problemas.** Pero esto tiene un costo porque la mutación es una abstracción que no se ve. Lo que uno ve son mutantes, y los mutantes raros necesitan grandes cantidades de población durante muchas generaciones para aparecer. Nuestro problema es estimar tales números. Nuestra primera pregunta es: ¿cómo es la dinámica de la proporción de coincidencia, la proporción de sitios que han sido adivinados?

**12 Ejercicio.** *Juegue con el programa Dictator.html que implementa el algoritmo dictatorial y muestra la dinámica de la proporción de sitios adivinados correspondiente. Saque sus conclusiones. Respuesta*

**13 Concurso.** *Déle sentido a los resultados de la simulación en el programa Dictator.html. Nuestra propuesta es la siguiente, paso uno de dos.*

Calculemos el caso en el que, por mera aleatoriedad, todos los sitios tocados por mutación se convierten en emparejados. Por lo tanto, ser tocado por una mutación es estar en lo correcto. Sea  $M_t$  el número de sitios coincidentes en el Dictador en la generación  $t$ . Para pasar a la siguiente generación, la cantidad de sitios que se ven afectados por la mutación es  $\mu M_t$ . Cuando se toca un sitio, se reemplaza por un bit coincidente. Por otro lado, los sitios  $M_t - \mu M_t$  que no se tocan siguen estando correctamente definidos. Al mismo tiempo, de los sitios  $H - M_t$  que no son correctos, se tocará una fracción  $\mu(H - M_t)$ . En el caso considerado, todos serán correctos. Al agregar todos los sitios que coinciden, obtenemos:

$$\begin{aligned}M_{t+1} &= \mu M_t + (M_t - \mu M_t) + \mu(H - M_t) \\M_{t+1} &= \mu M_t + M_t - \mu M_t + \mu H - \mu M_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{t+1} &= M_t - \mu M_t + \mu H \\
M_{t+1} &= M_t + \mu(H - M_t) \\
M_{t+1} - M_t &= \mu(H - M_t)
\end{aligned}$$

Esto significa que la cantidad de sitios coincidentes aumentará cuando  $H - M_t > 0$ , es decir, siempre. Por lo tanto, el progreso no solo está garantizado, sino que también podemos asegurarnos de que se acerca incesantemente a la solución perfecta porque la fuerza del progreso es proporcional a la tarea que falta. Además, cuando la tarea está casi completa, avanzar un poco tomaría más tiempo. Esto implica que el gráfico se abre hacia abajo en infinito. Además, también se abre hacia abajo en todas partes porque el proceso descrito también es muy simple.

**14 Ejercicio.** Encuentre la ecuación diferencial para la evolución de  $M_t$ , resuélvala y compare sus resultados con la simulación. *Respuesta*

**15 Un éxito fascinante.** Hemos elaborado una burda caricatura del efecto de la variabilidad creada por la mutación en una población. Asombrosamente como podría ser, nuestro tratamiento ha reproducido la silueta del hombro de la curva que representa la evolución de la proporción de sitios adivinados bajo selección dictatorial.

Ahora necesitamos un segundo paso porque la meseta del hombro no es 1 sino algo por debajo.

**16 Ejercicio.** En las simulaciones la parte superior del hombro disminuye a medida que aumenta la longitud de la contraseña. Explicar por qué. *Respuesta*

Sea  $M_t$  el número de sitios coincidentes en el Dictador en la generación  $t$ . Para pasar a la siguiente generación, la cantidad de sitios que se ven afectados por la mutación es  $\mu M_t$ . De ellos,  $s\mu M_t$  se reemplazan por un bit coincidente. Por otro lado, los sitios  $M_t - \mu M_t$  que no se tocan siguen estando correctamente definidos. Al mismo tiempo, de los sitios  $H - M_t$  que no son correctos, se tocará una fracción  $\mu(H - M_t)$ . De ellos,  $s\mu(H - M_t)$  se invertirá correctamente. Al sumar todos los sitios que coinciden, obtenemos:

$$\begin{aligned}
M_{t+1} &= s\mu M_t + (M_t - \mu M_t) + s\mu(H - M_t) \\
M_{t+1} &= s\mu M_t + M_t - \mu M_t + s\mu H - s\mu M_t \\
M_{t+1} &= M_t - \mu M_t + s\mu H \\
M_{t+1} &= M_t + \mu(sH - M_t) \\
M_{t+1} - M_t &= \mu(sH - M_t)
\end{aligned}$$

Esto significa que el número de sitios coincidentes aumentará cuando  $sH - M_t > 0$  y disminuirá en el caso contrario. O bien, la evolución es una fuerza estancadora alrededor de  $sH$ , con  $0,5 < s < 1$  en general. Esto explica por qué podría haber hombros abajo: la mutación al azar no es el rey Midas, pero de todos modos produce un giro correcto cuyo promedio en el más apto está representado por la proporción  $s$ .

**17 Desafío.** Sabemos por la simulación que cuanto mayor es  $H$ , menor es el hombro y menor es  $s$ . Esta es una evaluación cualitativa, posiblemente subjetiva. Encuentre la relación entre  $s$  y  $H$ , primero descriptivamente y luego matemáticamente.

**18 Desafío.** Observe que en las simulaciones, que incluyen una mutación aleatoria, las fluctuaciones alrededor del valor de equilibrio  $sH$  son mayores para las contraseñas pequeñas que para las largas. ¿Es esta una tendencia general y correcta? Demuestre su afirmación.

Comparemos ahora la Evolución con la aleatoriedad.

**19 Ejercicio.** Demuestre que la aleatoriedad por sí sola siempre alcanza una solución perfecta, aunque el costo a pagar es exponencial en la longitud de la entrada  $H$ .

*Respuesta*

**20 Intriga.** La aleatoriedad por sí sola siempre puede lograr la perfección, aunque a un costo exponencial. Siempre. Por el contrario, la Evolución es una fuerza tanto más retrógrada cuanto mayor es la longitud de la contraseña. ¿Significa esto que la perfección está prohibida para la Evolución Gradualista Disipativa? Y, si no es así, ¿cuál es más costoso entre la aleatoriedad y la evolución?

**21 Ejercicio.** Para responder a la intriga, ejecute el programa `DissptveGrad.html` y extraiga su conclusión. *Respuesta*

**22 Discusión.** Antes de aceptar los resultados del programa, es posible que prefiera verificar el código. Hágalo activando las banderas de impresión que están dentro del código. Una a la vez y para valores de contraseña de menos de 8.

**23 Concurso.** Defienda la idea de que el costo es exponencial. Nuestra propuesta es la siguiente.

El programa `DissptveGrad.html` presenta un gráfico de regresión que parece ajustarse a una función exponencial. En el rango estudiado, eso es incuestionable.

El problema está en la extrapolación a valores altos de la longitud de la contraseña, incluso al infinito. Sucede que un gráfico no es prueba de extrapolaciones exponenciales. La razón es que una dependencia exponencial no puede ser probada por una simulación porque cualquier conjunto finito de puntos en el plano también puede ser ajustado por un polinomio y cada polinomio es en rango largo infinitamente más barato que un costo exponencial. Entonces, es abusivo pretender que la dependencia es

exponencial en base a un gráfico. Pero una sucesión de gráficos podría hacerlo mejor porque se ve que la tendencia exponencial es estable. Esto se hace estudiando diferentes valores de longitud de contraseña. En el caso de estabilidad, como aquí, un ajuste polinomial pierde significado porque ningún polinomio puede acompañar a un exponencial en un rango largo, más bien se espera un crecimiento permanente del exponente principal del polinomio.

Ahora tenemos un lío: por un lado, el costo extrapolado a valores altos de longitud de contraseña podría ser polinomial. Por otro lado, podría ser exponencial como lo insinúa la regresión. Y en el aire, también podríamos tener que el costo de la función está mal definido porque la Evolución se frustra y no puede alcanzar la perfección.

Para descartar la tercera opción, ofrecemos nuestra fe en el poder de la Evolución: puede alcanzar la perfección. La razón es que la Evolución no mata la creatividad de la aleatoriedad salvaje. En efecto: La mutación en la Evolución es la misma mutación aislada. Además, la recombinación en la Evolución es una operación que produce grandes saltos en el espacio de las cadenas. Por lo tanto, no creemos que la creatividad de la aleatoriedad en la Evolución se disminuya con respecto a su trabajo en forma aislada. Entonces, el efecto de la aleatoriedad en el trasfondo retrógrado de la Evolución no disminuye: permanece vivo.

En segundo lugar,

El costo del problema de adivinación de cadenas binarias por Evolución Disipativa Gradual no puede ser menor que exponencial en la longitud de la entrada:

Al principio solo se debe hacer coincidir algunos bits, una tarea que es bastante fácil. Pero a medida que aumenta el nivel de coincidencia, se obtiene información que debe ser preservada de que la mutación la destruya. Cuanto mayor es la información obtenida, más amplio es el campo de acción destructiva de la mutación. Para proteger la información de la mutación, se debe hacer muchas copias para que algunas de ellas recibir por azar la dirección correcta de la mutación. Por lo tanto, la información obtenida funciona como una gran contraseña de seguridad todo-o-nada. ¿Por qué?

Dado que la aptitud no se asigna a caracteres específicos, sino solo a organismos, no se tiene idea de si un cambio en particular es bueno o malo. Luego, se deben probar todas las asignaciones posibles para que la selección pueda elegir al más apto. Y esto tiene un costo exponencial.

**24 Ejercicio.** *Demuestre que hay infinitas formas de ser mediocre y sub-perfecto. Haga sus predicciones sobre el registro fósil.* **Respuesta**

#### **4.5. Problemas prácticos**

Hemos dicho que utilizar la Evolución para resolver problemas puede resultar extremadamente costoso. **¿Qué tan buena es la Evolución en comparación con, digamos, la estrategia de búsqueda en el peor de los casos?**

**25 Ejercicio.** Ejecute el programa *DissptveGradVsRand.html* para comparar en un solo lugar el rendimiento de la Evolución con el de la aleatoriedad y con el de búsqueda en el peor de los casos. El costo de este último método es  $2^n$  porque ese es el número de opciones a probar en el peor de los casos para encontrar una cadena binaria de  $n$  bits de longitud. *Respuesta*

Otro aspecto de la complejidad es que **los problemas costosos de la industria y la ciencia no deben resolverse de manera exacta, sino solo aproximada.**

**26 Ejercicio.** Ejecute el programa *DissptveGradCostVsR.html* para estudiar el costo de adivinar una contraseña como función de  $r$ , el grado de aproximación de la solución una vez que se elige una longitud de contraseña determinada. *Respuesta*

**27 Desafío.** Demuestre que la dependencia del costo sobre  $r$  no es exponencial sino supraexponencial. Encuentre la dependencia explícitamente.

**28 Ejercicio.** Use el programa *DissptveGradCostVsR051.html* para mostrar que el costo de adivinar una contraseña cuando el grado de aproximación  $r$  es igual a 0,51 es exponencial en la longitud de la contraseña. Encuentra el exponente. Esto explica por qué estamos esclavizados a la mediocridad: aumentar la calidad impone una sobrecarga de recursos. O de manera equivalente, la investigación de alta calidad es exclusiva de personas con un alto sentido del honor; empresas ricas y países poderosos. *Respuesta*

**29 Desafío.** Demuestre que la dependencia exponencial encontrada en el gradualismo disipativo es válida para cada ajuste de los valores de los parámetros, tamaño de la población, mutación y tasas de recombinación.

**30 Desafío.** La Evolución se puede implementar de varias formas. Por ejemplo, la reproducción puede ser dictatorial. O puede ser justa, cuando la probabilidad de reproducción de un individuo es proporcional a su aptitud. Demuestre que si una implementación de la Evolución necesita un costo exponencial para resolver un problema, también lo hacen todas las demás. Esto significa que para la Ciencia, la Evolución es demasiado derrochadora para ser de alguna utilidad. Pero para la ingeniería, las diferencias entre las implementaciones pueden ser abismales y, por lo tanto, se deben asignar familias específicas de problemas a implementaciones específicas para minimizar los costos.

El siguiente concurso arroja luz sobre el problema de la necesaria diversidad de implementaciones de la Evolución.

**31 Concurso.** *La forma en que hemos implementado la Evolution es inútil en el caso en el que uno deba tratar con cadenas de varias longitudes y con una Evolución que afecte la longitud de las cadenas. Diseñe el mejor mecanismo para atacar esos problemas. Nuestra propuesta es trabajar con duplicación, supresión y recorte de cadenas como en el programa `DissptveGrad1010.html`.*

**32 Desafío.** *Demuestre que si un problema tiene un costo exponencial para la Evolución, entonces tiene un costo exponencial para cualquier otro método. Si esto se demuestra, la complejidad puede llamarse objetiva.*

## 4.6. Significado de costo exponencial

En una simulación uno siente que está lidiando con un problema con un costo exponencial cuando las primeras instancias del problema se resuelven de inmediato, luego comienza a aparecer cierta lentitud y después, de repente, uno tropieza con un retraso interminable sin ninguna solución. Para el problema de la adivinación binaria, la carga de la complejidad es demasiado pesada para una longitud de contraseña de 25.

Para percibir la implicación de un costo exponencial, consideremos la función exponencial más simple:

$$y = e^x$$

Tomando derivada:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$
$$dy = e^x dx$$

si planteamos que  $dx = 1$ , obtenemos:

$$dy = e^x$$

que dice: si incrementamos la longitud en uno, pasando de  $x$  a  $x + 1$ , el incremento del costo es  $e^x$ . Entonces, cuanto mayor sea  $x$ , el incremento en el costo  $y$  será exponencialmente mayor y muy pronto los recursos en todo el Universo serán insuficientes. Podemos ver esto si intentamos fabricar un número mayor que  $10^{1000}$  usando las constantes fundamentales de la naturaleza. Para probarlo, consideremos que

- La medida mínima de tiempo es un instantón dado por el tiempo de Planck, que es  $5,4 \times 10^{-44}$  segundos.
- La distancia mínima en el espacio es la longitud de Planck,  $1,6 \times 10^{-35}$  metros (Wolfe [14] 2005).
- El Universo tiene 13.77 mil millones de años (Letzter [9] 2020).
- El diámetro del Universo es de 93 mil millones de años luz (Baraniuk [1] 2016).

Así que::

Duración de tiempo mínima:

$$5 \times 10^{-44} \text{ segundos que da}$$
$$\frac{1}{5 \times 10^{-44}} = 2 \times 10^{43} \text{ instantones en un segundo.}$$

Edad del Universo 14 billones de años o

$$14 \times 10^9 \text{ años o}$$

$$14 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 5 \times 10^{17} \text{ segundos.}$$

Por tanto, el Universo ha existido durante

$$2 \times 10^{43} \times 5 \times 10^{17} = 10^{61} \text{ instantones.}$$

Calculemos ahora el número de celdas tridimensionales elementales contenidas en el Universo:

Un corismion es la longitud de Planck,  $1 \times 10^{-35}$  metros. Por tanto, un metro tiene  $10^{35}$  corismiones, unidades elementales de longitud. Así que en un metro cúbico hay lugar para  $10^{105}$  células de Planck. Si tomamos el diámetro del Universo como

$$100 \text{ billones de años luz o } 100 \times 10^9 \text{ años luz}$$

$100 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 300 \times 10^3 \times 10^3 = 10^{27}$  metros, el volumen del Universo es

$$(10^{27})^3 = 10^{81} \text{ metros cúbicos. Por consiguiente, hay lugar en el Universo para}$$
$$10^{105} \times 10^{81} = 10^{200} \text{ células elementales.}$$

Si multiplicamos el número de instantones por el de celdas elementales, obtenemos una estimación de la cota superior de los procesos elementales que pudieron haber sucedido en todo el Universo desde que empezó:

$$10^{61} \times 10^{200} = 10^{300}$$

Este número puede entenderse como el capital que tiene el Universo para hacer cosas. Veamos ahora cuánto cuesta adivinar nuestro ADN.

De acuerdo a nuestra simulaciones el costo de adivinar una cadena binaria de  $x$  bits de larga es a grosso modo  $y = e^x = 10^{0.5x}$ . Ahora tengamos en cuenta que el genoma humano tiene 3 billones de bases. Como hay 4 bases, dicho genoma se puede transcribir a una cadena binaria de 6 billones de bits. Así que el costo asociado para adivinarlo por Gradualismo es del orden de

$$\text{Costo} = y = 10^{0.5 \times 6 \times 1000000000} = 10^3 \times 1000000000$$

**Debemos comparar ahora el capital con el costo de adivinar nuestro ADN:**

**33 Ejercicio.** *Valore la siguiente acusación: Vemos que el Universo no fue hecho para que diera vida de sí mismo: existe una carencia crónica y letal de recursos para trascender la mediocridad en problemas complejos, como lo es la vida, aunque se tenga en cuenta todo el Universo. Por tanto, la Evolución no es, ni puede ser la explicación de la existencia de ningún genoma. Respuesta*

**34 Ejercicio.** Utilice nuestros resultados para inventar una falsificación robusta de la TE Gradualista o demuestre que no existe. *Respuesta*

**35 Graduación.** Comprima en un eslogan la ideología de este trabajo que es la misma de todos los que luchan en esta vida por hacer algo bueno. Ejemplo: El lema de la TE es: NADA EN BIOLOGÍA TIENE SENTIDO SI NO ES A LA LUZ DE LA EVOLUCIÓN. Fue una maravillosa invención del ucraniano Theodosius Dobzhansky ([3] 1973), quien se residió en los EE.UU. desde 1927. El representa a los que piensan que la fe en Dios y en la TE son compatibles.

## 5. CONCLUSIÓN

**36 Desafío.** Formule de forma clara y sucinta los principales resultados y sus implicaciones biológicas. Considere el registro fósil, así como la anatomía y fisiología de las especies e individuos presentes, incluido usted mismo.

## Respuestas

**Ejercicio 4, página 10.** El programa es muy rápido. Cuanto más larga es una tarea, más eficiente es el gradualismo no-disipativo.

**Ejercicio 5, página 10.** La regresión de la forma  $y = aH^r$  falla porque el exponente cambia según el rango considerado: para el rango 1...,100,  $r = 0,5$ . Pero para el rango 1...,5000,  $r = 0,2$ .

**Ejercicio 12, página 17.** Las contraseñas cortas, de menos de 10 letras, se adivinan casi de inmediato. A medida que aumenta un poco la longitud, la dinámica obedece una tendencia de hombro en la que ocurre un avance rápido al principio seguido de una convergencia muy lenta al valor máximo que es 1, es decir, la perfección. Para longitudes grandes, por encima de 25, también se observa el hombro, pero parece frustrarse en algún valor entre 0,5 y 1.

**Ejercicio 14, página 18.** La ecuación

$$M_{t+1} - M_t = \mu(H - M_t)$$

puede ser leída como sigue si consideramos que la unidad de tiempo es  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}\Delta M &= (M_{t+\Delta t} - M_t) = \mu(H - M_t)\Delta t \\ \frac{\Delta M}{\Delta t} &= \mu(H - M_t)\end{aligned}$$

Esta ecuación es válida para intervalos de tiempo finitos. Podemos extenderlo a tiempos infinitesimales como una ecuación diferencial:



$$\frac{dM}{dt} = \mu(H - M)$$

$$\frac{dM}{dt} + \mu M = \mu H$$

El lado derecho de esta ecuación dice que estamos tratando con una función exponencial  $ae^{kt}$ , y el lado izquierdo que debemos sumar una constante  $c$ . Entonces, postulamos una solución de la forma:

$$M = ae^{kt} + c$$

Después de reemplazar dicha solución en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\frac{d(ae^{kt} + c)}{dt} + \mu(ae^{kt} + c) = \mu H$$

$$ake^{kt} + \mu ae^{kt} + \mu c = \mu H$$

Estas ecuaciones son entre funciones. Entonces, la exponencial del lado izquierdo debe equipararse a la exponencial del lado derecho, y el equivalente con las constantes. Obtenemos:

$$ake^{kt} + \mu ae^{kt} = 0$$

Por tanto,

$ak + \mu a = 0$  or  $a(k + \mu) = 0$ . Puesto que  $a$  no puede ser nulo porque no habría proceso,

$$k + \mu = 0$$

$$k = -\mu.$$

De otro lado, al igualar las constantes de ambos lados de la ecuación original:

$$\mu c = \mu H$$

o

$$c = H.$$

Así que

$$M = ae^{kt} + c \text{ se convierte en}$$

$$M = ae^{-\mu t} + H = H + ae^{-\mu t}$$

Si ponemos  $M(0) = H/2$ , que sería lo esperado en una adivinación al azar, obtenemos:

$$H/2 = H + a$$

o

$$a = -H/2$$

y

$$M = H - \frac{H}{2}e^{-\mu t}$$

$$M = H\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\mu t}\right)$$

Por tanto, la dinámica de  $p$ , la proporción de bits adivinados, es:

$$p = \frac{M}{H} = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\mu t}\right)$$

Esta función comienza en  $1/2$  y crece constantemente hacia 1. Siempre abre hacia abajo porque la segunda derivada es siempre negativa.

**Ejercicio 16, página 18.** La silueta del hombro se derivó asumiendo que cada sitio tocado por la mutación se convierte en adivinado, como en la narración del rey Midas. Para explicar por qué el hombro desciende a medida que aumenta la complejidad o la longitud de la contraseña, intentemos el siguiente Ansatz: No todos los sitios tocados por la mutación son correctos, sino solo una fracción  $s$  de ellos. Así que:

**Ejercicio 19, página 19.** La probabilidad de coincidir en cualquier sitio por aleatoriedad es  $\frac{1}{2}$ , por lo que la probabilidad de coincidir en  $n$  sitios independientes es  $\frac{1}{2^n}$ . Por lo tanto, el costo promedio de adivinarlos en conjunto es de  $2^n$ . Es exponencial en  $n$ , la longitud de la entrada. Pero sólo en promedio.

**Ejercicio 21, página 19.** El programa dice que el costo es exponencial tanto para el azar como para la Evolución.

**Ejercicio 24, página 20.** Nuestros programas crean una población de cadenas binarias que se generan al azar y que evolucionan con operaciones integradas en aleatoriedad. Y los resultados son siempre los mismos: las cadenas cortas se adivinan instantáneamente, pero a medida que aumenta la longitud, la subperfección se convierte en la norma. Con una longitud de miles, eliminar la mediocridad debería ser exponencialmente costoso. Esto significa que nuestros procesos visitan todo el espacio de posibilidades y, por lo tanto, todos los sabores de mediocridad y perfección se realizan durante tiempos muy largos. Por ende, cuando los registros fósiles son posibles, estos deben estar dominados por todo tipo de imperfecciones. Del mismo modo, todo tipo de fracasos debe abundar en todos los recién nacidos de todas las especies.

**Ejercicio 25, página 20.** La búsqueda en el peor de los casos es más cara que la aleatoriedad, que es más cara que la Evolución. De todos modos, todos los métodos tienen un costo exponencial:

Búsqueda en el peor de los casos:

$$\text{costo} = 1e^{(0.69x)}$$

Aleatoriedad:

$$\text{costo} = 0.4e^{(0.69x)}$$

Evolución:

$$\text{costo} = 1e^{(0.62x)}$$

**Ejercicio 26, página 21.** Para secuencias cortas, de menos de 15, no hay problema. Cuando la longitud es un poco mayor que 15, se puede ver que la baja calidad es muy barata y que los problemas comienzan con  $r = 0,9$ . Para una longitud de 50 los problemas comienzan con  $r = 0,8$ . El programa insinúa que la dependencia del costo contra  $r$  es exponencial. Sin embargo, las curvas no cazan bien sobre una exponencial sino que tienden a desbordarse.

**Ejercicio 28, página 21.** Estamos considerando un grado de aproximación extremadamente bajo. Para una contraseña corta, la mutación aleatoria sería dominante sobre cualquier efecto sistemático. Entonces, necesitamos explorar contraseñas muy largas. Para ello, tomamos contraseñas cuya longitud es un múltiplo de 10000. Encontramos que la dependencia es exponencial:  $costo = e^{0,0002x}$ . Esto significa que  $costo = 10^{1000} = e^{2303}$  se logra cuando  $0,0002x = 2303$ , e.i., cuando  $x = 12$  millones. En biología molecular, esta longitud es minúscula.

**Ejercicio 33, página 23.** La acusación es débil porque la Evolución se usa todos los días para producir grandes cosas y porque todo es posible para el azar.

**Ejercicio 34, página 24.** Una falsificación indiscutible de la ET Gradualista se basa en el hecho de que la Evolución predice una Evolución obligatoria de la Perfección. Podemos argumentarlo de la siguiente manera: el costo para lograr la perfección es exponencial en la longitud de la contraseña binaria. Ahora, la derivada de una exponencial es una exponencial. Esto significa que el costo de adivinar un nuevo bit es exponencial y debido a que el costo es proporcional al número de generaciones, esto significa que después de cada nuevo éxito hay un estancamiento cuya duración es exponencial en el número de pasos anteriores. Esto implica que el ET Gradualista predice que el registro fósil debe estar lleno de testigos mediocres y poco calificados de la Evolución de la Perfección. Pero además, ese testimonio debe ser visible en nuestros propios cuerpos, anatomía y fisiología. Entonces, mírese a sí mismo y decida: ¿Es Usted perfecto? Se puede obtener el mismo resultado y análisis utilizando el programa DissptveGradCostVsR.html, el cual podría reforzarse con el programa DissptveGradCostVsR051.html.

## Bibliografía

Todos los enlaces citados estaban activos el 31/III/2021

## Referencias

- [1] CHRIS BARANIUK, BBC 13 JUNE 2016

*It took centuries but we now know the size of the universe*

<http://www.bbc.com/earth/story/20160610-it-took-centuries-but-we-now-know-the-size-of-the-universe> 22

- [2] DARWIN C 1859 *The origin of species* Murrapp, Londres.

Darwin Online

<http://darwin-online.org.uk/content/frameset?itemID=F373&viewtype=side&page>

Online Variorum of Darwin's Origin of Species: first British edition (1859), page 186

- <http://darwin-online.org.uk/Variorum/1859/1859-187-c-1861.html>  
2
- [3] THEODOSIUS DOBZHANSKY 1973 *Nothing in Biology Makes Sense Except in the Light of Evolution*, *American Biology Teacher*, 35 (3): 125–129, March 1973  
<https://online.ucpress.edu/abt/article/35/3/125/9833/Nothing-in-Biology-Makes-Sense-Except-in-the-Light-of-Evolution>  
24
- [4] BRUNO DUBUC 2000? *Tool Module: Chomsky's Universal Grammar*  
[https://thebrain.mcgill.ca/flash/capsules/outil\\_rouge06.html](https://thebrain.mcgill.ca/flash/capsules/outil_rouge06.html)  
12
- [5] A. D. HALL 1935  
HUGO DE VRIES 1848-1935  
<https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsbm.1935.0002>  
13
- [6] JOHN H. HOLLAND 1992 *Genetic Algorithms*, *Scientific American*, Vol. 267, No. 1 (JULY 1992), pp. 66-73  
<http://bingweb.binghamton.edu/~apape/courses/e670/papers/holland-geneticalgorithms.html>  
13
- [7] WILLIAM HORTON 2013? *Hangman*  
<http://horton.com/consulting/portfolio/wordQuiz/index.html>  
8
- [8] ANTHONY JF GRIFFITHS, JEFFREY H MILLER, DAVID T SUZUKI, RICHARD C LEWONTIN, AND WILLIAM M GELBART NEW YORK: W. H. FREEMAN; 2000.  
*An Introduction to Genetic Analysis. 7th edition. Mendel's experiments*  
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK22098/> 2
- [9] RAFI LETZTER 2020  
*Oldest surviving light reveals the universe's true age*  
<https://www.livescience.com/universe-expansion-atacama-hubble-constant-measurement.html> 22
- [10] BRENDAN SHEA, CIRCA 2015 *Karl Popper: Philosophy of Science*, *Internet Encyclopedia of Philosophy*  
<https://iep.utm.edu/pop-sci/> 7
- [11] LYNN JORDE, PH.D. 2016 *NHGRI Current Topics in Genome Analysis 2016 Week 7: Introduction to Population Genetics April 6, 2016*  
<https://www.genome.gov/sites/default/files/media/files/2019-03/Introduction-to-Population-Genetics-April-6-2016.pdf>  
2
- [12] CHARLES D. YANG 2004 *Universal Grammar, statistics or both? TRENDS in Cognitive Sciences Vol.8 No.10 October 2004*  
<https://glowlinguistics.org/37/pdf/tics-final.pdf> 13
- [13] STEVEN WEINBERG 1988  
*The cosmological constant problem*  
[https://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/61094/Weinberg\\_1988.pdf](https://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/61094/Weinberg_1988.pdf)  
7

[14] JOE WOLFE 2005

*The Planck scale: relativity meets quantum mechanics meets gravity.*

[https://newt.phys.unsw.edu.au/einsteinlight/jw/module6\\_Planck.htm](https://newt.phys.unsw.edu.au/einsteinlight/jw/module6_Planck.htm)

22